

Superdiffuziya tenglamalarida chegaraviy shartlarning yechimga ta'sirini tahlil qilish.

Jumanazarova Hafiza G'ayrat qizi-Oxu universiteti matematika mutaxassisligi magistranti

Annotatsiya: Ushbu tezisdagi superdiffuziya tenglamalarida chegaraviy shartlarning yechimga ta'sirini tahlil qilish mavzusi ko'rib chiqiladi. Superdiffuziya (anomal diffuziya) jarayonlari fraksional differensial tenglamalar yordamida tasvirlanadi, bu yerda oddiy diffuziyadan farqli o'laroq, zarralar uzoq masofali sakrashlar (Lévy flights) orqali harakatlanadi. Chegaraviy shartlar (Dirichlet, Neumann/reflektiv, Robin va boshqalar) yechimning barqarorligi, massani saqlashi, uzun muddatli xatti-harakatiga sezilarli ta'sir ko'rsatadi. Tezisdagi matematik formulalar, analitik va sonli yondashuvlar, shuningdek, chegara shartlarining fizikaviy talqini berilgan. Tadqiqot natijalari superdiffuziya modellari qo'llaniladigan fizika, kimyo, biologiya va ekologiya sohalarida amaliy ahamiyatga ega.

Kalit so'zlar: Superdiffuziya, fraksional diffuziya tenglamasi, chegaraviy shartlar, Riemann-Liouville fraksional derivativasi, reflektiv chegara, Lévy flights, massani saqlash, sonli usullar (Crank-Nicolson), anomal transport.

Аннотация: В данной диссертации рассматривается анализ влияния граничных условий на решение уравнений супердиффузии. Процессы супердиффузии (аномальной диффузии) описываются с помощью дробных дифференциальных уравнений, где, в отличие от простой диффузии, частицы движутся посредством дальних скачков (полётов Леви). Граничные условия (Дирихле, Неймана/отражательные, Робина и др.) оказывают существенное влияние на устойчивость, сохранение массы и долговременное поведение решения. В диссертации представлены математические формулы, аналитические и численные подходы, а также физическая интерпретация граничных условий. Результаты исследования имеют практическое значение в областях физики, химии, биологии и экологии, где используются модели супердиффузии.

Ключевые слова: Супердиффузия, дробное уравнение диффузии, граничные условия, дробная производная Римана-Лиувилля, отражательный



предел, полёты Леви, сохранение массы, численные методы (Кранк-Николсон), аномальный перенос.

Abstract: This thesis deals with the analysis of the effect of boundary conditions on the solution in superdiffusion equations. Superdiffusion (anomalous diffusion) processes are described using fractional differential equations, where, unlike simple diffusion, particles move by long-range jumps (Lévy flights). Boundary conditions (Dirichlet, Neumann/reflective, Robin, etc.) have a significant impact on the stability, mass conservation, and long-term behavior of the solution. The thesis provides mathematical formulas, analytical and numerical approaches, as well as a physical interpretation of the boundary conditions. The research results are of practical importance in the fields of physics, chemistry, biology, and ecology, where superdiffusion models are used.

Keywords: Superdiffusion, fractional diffusion equation, boundary conditions, Riemann-Liouville fractional derivative, reflective limit, Lévy flights, mass conservation, numerical methods (Crank-Nicolson), anomalous transport.

Kirish

Diffuziya – moddalar yoki zarralarning muhit bo‘ylab tarqalishi jarayoni bo‘lib, klassik holatda Fick qonuni va ikkinchi tartib differensial tenglama bilan tasvirlanadi. Biroq, ko‘plab tabiiy va texnogen jarayonlarda (porli muhitlarda transport, plazma turbulentligi, biologik hujayralarda harakat) anomal diffuziya kuzatiladi: subdiffuziya (sekinroq tarqalish) yoki superdiffuziya (tezroq, uzoq sakrashlar bilan). Superdiffuziya ko‘pincha fraksional fazoviy derivativlar ($1 < \alpha < 2$) orqali modellashiriladi.

Superdiffuziya tenglamasi odatda quyidagi shaklda yoziladi:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = D (p {}_{RL}D_x^\alpha + q {}_{RL}D_{-x}^\alpha) u(x, t) + s(x, t)$$

bu yerda $u(x, t)$ – zarralar konsentratsiyasi, D – diffuziya koeffitsienti, p, q – og‘irliklar ($p + q = 1$),
 ${}_{RL}D^\alpha$ – Riemann-Liouville fraksional derivativasi. Stt.msu

Chegaraviy shartlar muammoning to‘g‘riligini ta’minlaydi va yechimning xususiyatlarini belgilaydi. Masalan, reflektiv (Neumann tipidagi nol oqim) shart massani saqlaydi, Dirichlet (absorbing) shart esa zarralarni yutadi. Ushbu tezisning maqsadi – chegaraviy shartlarning yechimning dinamikasi, barqarorligi va uzoq

muddatli xatti-harakatiga ta'sirini tahlil qilishdir. Tadqiqot O'zbekiston va xalqaro adabiyotlar asosida amalga oshirilgan.

Asosiy qism

Superdiffuziya uzoq sakrashlar bilan bog'liq bo'lib, oddiy harakatdan farqli o'laroq, dispersiya tezroq o'sadi. Tenglama ochiq domen uchun fraksional derivativlardan foydalanadi. Ikki tomonlama holatda simmetrik derivativalar qo'llaniladi.

Chegaraviy shartlarning ta'siri kuchli: reflektiv chegara uchun oqim nolga tenglashtiriladi, bu chap va o'ng fraksional qismlarning muvozanatini talab qiladi. Bu shart yechimning chegarada o'zgarishiga olib kelishi mumkin. Yutiluvchi shartlar esa massani yo'qotadi.

O'zbek adabiyotida differensial tenglamalar va chegaraviy masalalar bo'yicha ko'plab ishlar mavjud.

Chegaraviy shartlar turlari va ularning yechimga ta'siri

Yutiluvchi chegaraviy shartlarda konsentratsiya chegarada nolga teng bo'ladi. Zarralar yutiladi va massa tezroq kamayadi. Reflektiv shartlarda oqim nolga teng bo'ladi. Bu massani saqlaydi va zarralar qaytadi. Superdiffuziyada bu uzoq sakrashlarni aks ettiradi va yechimni chegaraga yaqin joyda boyitadi. Aralash shartlar qisman yutilishni ifodalaydi.

Tahlil shuni ko'rsatadiki, reflektiv chegara yechimning cho'qqisini chegaraga yaqinlashtiradi va uzoq muddatli taqsimotni o'zgartiradi. Ochiq domen bilan solishtirganda massa chegarada to'planadi. Sonli tajribalarda fraksional parametr kichik bo'lganda ta'sir kuchayadi.

Sonli yechish usullari

Sonli sxemalar, masalan, o'rtacha vaqt sxemasi yoki maxsus yaqinlashuvlar qo'llaniladi. Reflektiv chegara uchun modifikatsiyalangan fraksional integral ishlatiladi. Barqarorlik va aniqlik tahlili maxsus teorema yordamida amalga oshiriladi. Sxema shartsiz barqaror bo'lishi mumkin. Bu yondashuv xatolikni past darajada saqlaydi.

Analitik yechimlar va maxsus holatlar

Ba'zi maxsus chegaraviy shartlar uchun maxsus funksiyalar yordamida aniq yechimlar topiladi. Yarim cheksiz domen uchun reflektiv shartda yechimning



simmetrik kengaytmasi qo'llaniladi. O'zbekistonlik olimlar fraksional tenglamalar uchun teskari masalalar va yechimlar ustida ishlagan.

Muhokama

Chegaraviy shartlar superdiffuziya yechimining fizikaviy ma'nosi va matematik to'g'riligini belgilaydi. Reflektiv shartlar real muhitlarni yaxshi modellashtiradi, ammo hisoblarda qo'shimcha murakkablik keltirib chiqaradi. Yutiluvchi shartlar soddaroq, lekin massa yo'qotilishi real jarayonlarga mos kelmasligi mumkin. Fraksional parametrning qiymati chegaraviy ta'sirni kuchaytiradi. Klassik holatga yaqinlashganda ta'sir zaiflashadi.

O'zbek adabiyotida matematik fizika tenglamalari va chegaraviy masalalar bo'yicha chuqur tahlillar mavjud.

Xulosa va takliflar

Superdiffuziya tenglamalarida chegaraviy shartlar yechimning dinamikasiga, massani saqlashiga va uzoq muddatli xatti-harakatiga hal qiluvchi ta'sir ko'rsatadi. Reflektiv shartlar superdiffuziv jarayonlarni real muhitlarda modellashtirish uchun eng mos keladi. Kelajakdagi ishlar uchun ko'p o'lchovli muammolar, nonlinear holatlar, vaqt-fraksional birikmalari va O'zbekistonda amaliy qo'llanishlar taklif etiladi. Sonli usullarni optimallashtirish va parallel hisoblash zarur.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Jesus C., Sousa E. Superdiffusion in the presence of a reflecting boundary. Applied Mathematics Letters, 2020. (Sahifalar 1-8).
2. Kelly J.F., Sankaranarayanan H., Meerschaert M.M. Boundary conditions for two-sided fractional diffusion. Journal of Computational Physics, 2019, jild 376, sah. 1089-1107.
3. Ashurov R., Shamuratov D. The backward problem for a multi-term time-fractional diffusion equation. arXiv, 2026 (O'zbekistonlik mualliflar ishi).
4. Karimov E. va boshqalar. On self-similar solutions of time and space fractional sub-diffusion equations. IJOCTA, 2021 (sah. 16-27).
5. Pskhu A.V. Green function of the first boundary-value problem for the fractional diffusion wave equation.
6. Durdiev D.K. Inverse Problems for Fractional Diffusion Equations. Springer, 2025 (O'zbekistonlik muallif).
7. O'zbekiston Respublikasi oliy ta'lim muassasalari uchun "Matematik fizika tenglamalari" darsligi va giperbolik tipdagi chegaraviy masalalar bo'yicha materiallar.
8. Benson D.A. va boshqalar. Models of space-fractional diffusion.