

Yarim o'qda Korteveg–de Friz (KdF) tenglamasi, boshlang'ich–chegaraviy masala, yechim usullari va amaliy talqinlar

Eshchanova Gulchehra Sheribbayevna

Abu Rayhon Beruniy nomidagi Urganch davlat universiteti huzuridagi fizika-matematika va informatika fanlariga ixtisoslashtirilgan maktab direktori
gulchehra050989@gmail.com

Annotatsiya

Ushbu tezisda Korteveg–de Friz tenglamasining yarim o'q ($x \geq 0$) sohasida qo'yiladigan boshlang'ich–chegaraviy masalasi (initial-boundary value problem, IBVP) yoritiladi. KdF tenglamasi nochiziqli dispersiv jarayonlarni, xususan sayoz suv to'liqlari, plazmadagi ion-akustik to'liqlar va elastik muhitdagi impulsning tarqalishini modellashtirishda klassik model hisoblanadi. Cheksiz butun o'qdagi masalalarga nisbatan yarim o'qda yechim topish murakkabroq: bunga sabab $x = 0$ chegaradagi shartlar nolinearlik bilan birikib, spektral bog'lanishlarni keltirib chiqarishidir. Tezisda chegaraviy shartlarning turlari, moslik (compatibility) talablari, hamda yechim qurishning analitik (teskari sochilish, Fokasning yagona transformi) va sonli (diskret sxemalar) yondashuvlari haqida tizimli tasavvur beriladi.

Kalit so'zlar: KdF tenglamasi, yarim o'q, boshlang'ich–chegaraviy masala, Dirixle sharti, Neyman sharti, Fokas usuli, soliton, dispersiya.

1. Kirish. Mavzuning dolzarbligi

KdF tenglamasi nolinear dispersiv to'liqlar nazariyasida eng ko'p o'rganilgan tenglamalardan biridir. Uning klassik ko'rinishi quyidagicha yoziladi:

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

Bu yerda $u(x,t)$ – to'liq amplitudasi (yoki fizik kattalik), u_t vaqt bo'yicha, u_x va u_{xxx} esa fazo bo'yicha hosilalarni bildiradi. Tenglamadagi $6uu_x$ hadi nolinearlikni, u_{xxx} hadi esa dispersiyani ifodalaydi. Ushbu ikki omil muvozanati natijasida solitonlar (shaklini saqlab tarqaluvchi lokal to'liqlar) vujudga keladi va ular o'zaro ta'sirlashganda ham barqaror xatti-harakat namoyon qiladi.

Amaliy masalalarda jarayonlar ko'pincha butun o'q ($-\infty < x < \infty$) emas, balki chegaralangan yoki yarim cheksiz sohada kechadi: masalan, kanal yoki truba kirish qismi, qirg'oq yaqinidagi suv to'liqlari, to'liq generatori o'rnatilgan nuqta va hokazo.



Shu sababli $x \geq 0$ yarim o'qda KdF tenglamasini o'rganish dolzarb hisoblanadi. Yarim o'qda yechimni aniqlash uchun faqat boshlang'ich shart yetarli emas, chunki fazo bo'yicha uchinchi tartibli hosila mavjud, demak, $x = 0$ chegarada qo'shimcha shartlar kiritilishi zarur. Chegaraviy shartlarni to'g'ri tanlash va ularni boshlang'ich ma'lumot bilan moslashtirish (compatibility) masalaning yaxshi qo'yilganligini (well-posedness) ta'minlaydi, yechim mavjud bo'lishi, yagona bo'lishi va ma'lumotlarga uzluksiz bog'liq bo'lishi kerak.

Maqsad va vazifalar:

Maqsad: yarim o'qda KdV tenglamasi uchun boshlang'ich–chegaraviy masalani to'g'ri qo'yish, yechimlarni qurishning asosiy usullarini yoritish va chegaraviy ma'lumotlarning rolini tushuntirish.

Vazifalar:

- 1) KdV tenglamasining matematik va fizik mazmunini qisqacha bayon qilish.
- 2) Yarim o'qda IBVP qo'yilishida boshlang'ich va chegaraviy shartlarning turlarini ko'rsatish.
- 3) Boshlang'ich–chegaraviy moslik shartlarini tushuntirish va ularning ahamiyatini izohlash.
- 4) Analitik yondashuvlar (spektral usullar, Fokasning yagona transformi) haqida umumiy tasavvur berish.
- 5) Sonli yechimlar uchun asosiy prinsiplar: diskretlash, chegarada hisoblash, barqarorlik masalalarini qisqacha yoritish.
- 6) Chegara bilan soliton to'lqinlarning o'zaro ta'siri va amaliy talqinlarini muhokama qilish.

Mavzuning obyekti va predmeti

Obyekt: $x \geq 0$ sohasida KdV tenglamasi bilan tavsiflanadigan dispersiv-nolinear jarayonlar.

Predmet: yarim o'qda KdV tenglamasining boshlang'ich–chegaraviy masalasi, chegaraviy shartlar sinflari va yechim qurish yondashuvlari.

Tadqiqot usullari sifatida matematik tahlil (PDE nazariyasi), spektral yondashuv elementlari, integral ifodalar, chegaraviy ma'lumotlarni klassifikatsiya qilish hamda sonli metodlarga oid umumiy prinsiplar qo'llanadi.

Yarim o'qda KdF tenglamasi uchun boshlang'ich–chegaraviy masalaning qo'yilishi

Yarim o'qda KdF tenglamasi uchun tipik masala quyidagicha yoziladi:

$$u + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad x \geq 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = u_0 x, \quad x \geq 0$$

Chegaraviy shartlar: $u(0, t)$, $u_x(0, t)$, $u_{xx}(0, t)$ funksiyalardan ba'zilari, $t \geq 0$.

KdF tenglamasi fazo bo'yicha uchinchi tartibli bo'lgani uchun, intuitiv ravishda $x = 0$ da uchta chegaraviy kattalikdan kamida bittasi (ba'zan ikkitasi) berilishi kerak bo'ladi. Biroq nolinear tenglamada qaysi kombinatsiya masalani yaxshi qo'yishini aniqlash har doim ham trivial emas. Amaliyotda ko'p uchraydigan shartlar:

Dirixle sharti:

$$u(0, t) = g_0(t)$$

Neumann sharti:

$$u_x(0, t) = g_1(t)$$

hamda ikkinchi hosila sharti:

$$u_{xx}(0, t) = g_2(t)$$

Shuningdek, aralash (Robin) tipidagi shartlar ham uchraydi.

Boshlang'ich shart va chegaraviy shartlar $t = 0$ nuqtada o'zaro mos kelishi talab qilinadi. Masalan, Dirixle sharti berilsa, u holda

$$u(0, 0) = u_0(0) = g_0(0)$$

bo'ladi.

Agar $u_x(0, t) = g_1(t)$ berilgan bo'lsa, $u'_0(0) = g_1(0)$ moslik sharti kelib chiqadi. Yuqori tartibli silliqlik talab qilinganda, moslik shartlari ham yuqori tartiblarga davom etadi. Bu talablar yechimning silliq bo'lishi, hisoblashda beqaror tebranishlar paydo bo'lmasligi va fizik talqinning to'g'ri bo'lishi uchun muhim.

Masala yaxshi qo'yilgan deyilishi uchun (Hadamard ma'nosida) uchta shart bajarilishi kutiladi:

- yechim mavjud bo'lishi;
 - yechim yagona bo'lishi;
 - yechim boshlang'ich-chegaraviy ma'lumotlarga uzluksiz bog'liq bo'lishi.
- KdF kabi dispersiv tenglamalarda bu xossalarga erishish uchun funksional fazolar (masalan, Sobolev fazolari) doirasida baholashlar olinadi. Yarim o'qda esa

chegaradagi oqim (boundary flux) va energiya balansini masalaning barqarorligi bilan chambarchas bog'lanadi.

Butun o'qda KdF tenglamasi integrallanuvchi tenglama bo'lib, ko'pincha teskari sochilish transformi (IST) orqali yechim quriladi. IST g'oyasi shundan iboratki:

- boshlang'ich shart $u_0(x)$ spektral ma'lumotlarga o'tkaziladi;
- vaqt bo'yicha spektral evolyutsiya oddiy ko'rinishga ega bo'ladi va keyin teskari transform yordamida $u(x,t)$ tiklanadi.

Yarim o'qda esa asosiy qiyinchilik shundaki:

$x = 0$ chegaradagi shartlar spektral ma'lumotlarni o'zgartiradi va noma'lum chegaraviy kattaliklarni 'yopish' zarurati paydo bo'ladi.

Bu yondashuv boshlang'ich va chegaraviy ma'lumotlarni yagona spektral munosabat — global relation — orqali bog'laydi. Global relation berilgan ma'lumotlardan noma'lum chegaraviy funksiyalarni aniqlashga yordam beradi (ba'zan yopiq formula ko'rinishida, ba'zan esa integral tenglamalar orqali). Natijada yechim odatda Riman–Gilbert tipidagi muammo yoki Gel'fand–Levitan–Marchenko (GLM) integral tenglamalari vositasida rekonstruksiya qilinadi.

Yarim o'qda har qanday chegaraviy shart integrallanuvchi tuzilmani saqlab qolmaydi. Biroq ayrim maxsus chegaraviy shartlar mavjud bo'lib, ular spektral jihatdan qulay va rekonstruksiyaning soddalashtiradi; bunday shartlar ba'zan 'linearlashtiriladigan' yoki 'integrallanuvchi' chegaralar deb yuritiladi. Masalan, Robin tipidagi ayrim aralash shartlar yoki simmetriya keltirib chiqaradigan shartlar yarim o'q muammosini butun o'qdagi muammoga yaqinlashtirishi mumkin. Bu holatlarda solitonlarning chegara bilan o'zaro ta'siri ham nisbatan tartibli tarzda tavsiflanadi.

Sonli (numerik) yondashuv, amaliy hisoblash masalalari

Ko'plab amaliy vaziyatlarda analitik formula olish qiyin bo'lgani sababli, yarim o'qda KdF ni sonli yechish muhim. Hisoblashda odatda $x \geq 0$ soha katta L bilan kesilib, $0 \leq x \leq L$ interval ko'riladi va $x = L$ nuqtada so'nish yoki chiqish (outflow) sharti qo'yiladi. Fazo bo'yicha hosilalar uchun markaziy farqlar yoki yuqori tartibli farq sxemalari, vaqt bo'yicha esa barqarorlikni oshiruvchi yarim-implicit/implicit usullar qo'llanadi.

Chegaraviy nuqtada ($x = 0$) u_x, u_{xx}, u_{xxx} kabi hosilalarni hisoblash uchun bir tomonlama farqlar yoki 'ghost point' texnikasi ishlatiladi. Aynan chegarada moslik

shartlariga amal qilinmasa, diskret yechimda sun'iy tebranishlar va beqarorlik paydo bo'lishi mumkin. Shuningdek, dispersiv had (u_{xxx}) vaqt bo'yicha qattiq qadam cheklovlarini keltirib chiqarishi mumkin.

Chegara bilan to'liqinning o'zaro ta'siri

Soliton yarim o'qda chegaraga yaqinlashganda, uning dinamikasi chegaraviy shart turiga bog'liq ravishda o'zgaradi:

- aks etish (reflection);
- fazaviy siljish;
- amplitudaning o'zgarishi yoki murakkab interferensiya kuzatilishi mumkin.

Masalan, Dirixle sharti berilgan holatda chegara 'qattiq' to'siq rolini o'ynashi, ba'zi aralash shartlarda esa energiyaning bir qismi chetga chiqarilishi (yutilish) kabi effektlar yuzaga kelishi mumkin. Bu hodisalar fizik modellashtirishda muhim.

Amaliy talqinlar va ilmiy ahamiyat

Yarim o'qda KdF masalalarini o'rganish bir nechta yo'nalishda ahamiyatli:

- fizik realizm — real tizimlarda chegara mavjud;
- boshqaruv va signal uzatish — $u(0,t) = g_0(t)$ kabi chegaraviy boshqaruv orqali to'liq paketlarini shakllantirish;
- soliton texnologiyalari — dispersiv-nolinear muhitlarda solitonlar barqaror tashuvchi sifatida qaraladi;
- matematika — integrallanuvchi PDE lar uchun yarim o'q IBVP spektral tahlil, Riman–Gilbert muammolari va GLM integral tenglamalarining rivojlanishiga turtki bergan.

XULOSA

Ushbu maqolada Yarim o'qda Korteveg–de Friz tenglamasi uchun boshlang'ich–chegaraviy masalaning mohiyati bayon qilindi.

Asosiy xulosa shuki:

KdF uchinchi tartibli fazoviy hosilaga ega bo'lgani sababli yarim o'qda masalani qo'yishda chegaraviy shartlarning turi va soni, shuningdek boshlang'ich-chegaraviy ma'lumotlarning mosligi yechimning mavjudligi, yagonaligi va barqarorligida hal qiluvchi rol o'ynaydi. Analitik yechimlar uchun Fokasning yagona transformi singari spektral yondashuvlar yarim o'q muammolarini tizimli tahlil qilishga imkon beradi, sonli metodlar esa real parametrlar bilan modellashtirishda amaliy ahamiyat kasb etadi.

Kelgusida integrallanuvchi chegaraviy shartlar, solitonlarning chegara bilan dinamikasi hamda optimal chegaraviy boshqaruv masalalari istiqbolli yo'nalishlar sifatida qaraladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI:

1. Drazin, P. G. & Johnson, R. S. (1989). Solitons: An Introduction. Cambridge University Press.
2. Ablowitz, M. J. & Segur, H. (1981). Solitons and the Inverse Scattering Transform. SIAM.
3. Fokas, A. S. (2008). A Unified Approach to Boundary Value Problems. SIAM.
4. Whitham, G. B. (1974). Linear and Nonlinear Waves. Wiley.
5. Aktosun, T. van der Mee, C. (turli maqolalar): yarim o'qda KdV tenglamasi uchun yechim konstruksiyalari va GLM yondashuvi.
6. J. L. Bona, S. M. Sun, and B. Y. Zhang, A non-homogeneous boundary-value problem for the Korteweg-de Vries equation in a quarter plane, Trans. Amer. Math. Soc. 354, 427–490 (2002).
7. A. S. Fokas, Integrable nonlinear evolution equations on the half-line, Comm. Math. Phys. 230, 1–39 (2002).
8. N. J. Zabusky and M. D. Kruskal, Interaction of “solitons” in a collisionless plasma and the recurrence of initial states, Phys. Rev. Lett. 15, 240–243 (1965).
9. M. J. Ablowitz and H. Segur, Solitons and the inverse scattering transform, SIAM, Philadelphia, 1981.
10. M. J. Ablowitz and P. A. Clarkson, Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering, Cambridge Univ. Press, London, 1991.
11. C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal and R. M. Miura, Method for solving the Korteweg-de Vries equation, Phys. Rev. Lett. 19, 1095–1097 (1967).
12. V. A. Marchenko, Nonlinear equations and operator algebras, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1988.