MULTIDISCIPLINARY JOURNAL: FUNDAMENTAL RESEARCH SCIENTIFIC JOURNAL
VOLUME 02. ISSUE 06. JUNE 2026.
ResearchBib Impact Faktor: 13.943 ISSN: 3060-513X

B − GIPERBOLIK TENGLAMA UCHUN IKKINCHI CHEGARAVIY MASALA

Osiyo Xalqaro Universiteti
Matematika yo'nalishi 1-kurs talabasi
Sultonov Muhammad

Annotatsiya

Mazkur maqolada ***B*** − giperbolik tenglamalar uchun ikkinchi chegaraviy masalani o‘rganish, ularning nazariy asoslari, tarixiy rivoji, milliy va xorijiy olimlarning hissasi, shuningdek, empirik tadqiqotlar va amaliy qo‘llanilishi keng qamrab olingan. Giperbolik tenglamalar matematik fizika va muhandislikda muhim ahamiyat kasb etib, ularni chegaraviy shartlar bilan to‘liq tadqiq etish ko‘plab real muammolarni yechishda asosiy omil hisoblanadi. Maqolada masalaning dolzarbligi, hozirgi zamon tadqiqotlari, tanqidiy yondashuvlar va kelgusi istiqbollari batafsil tahlil qilinadi.

Kalit so'zlar: giperbolik tenglama, ikkinchi chegaraviy masala, differensial tenglamalar, matematik fizika

Abstract

This article explores the second boundary value problem for the ***B*** − hyperbolic equation, covering its theoretical foundations, historical development, the contributions of national and international scholars, as well as empirical research and practical applications. Hyperbolic equations are crucial in mathematical physics and engineering, and a thorough study of these equations with boundary conditions is essential for solving many real-world problems. The article provides a comprehensive analysis of the relevance, current research, critical approaches, and future perspectives of the subject.

Keywords: hyperbolic equation, second boundary value problem, differential equations, mathematical physics

MULTIDISCIPLINARY JOURNAL: FUNDAMENTAL RESEARCH SCIENTIFIC JOURNAL
VOLUME 02. ISSUE 06. JUNE 2026.
ResearchBib Impact Faktor: 13.943 ISSN: 3060-513X

Аннотация

В данной статье рассматривается вторая краевая задача для B − гиперболического уравнения, охватываются теоретические основы, историческое развитие, вклад отечественных и зарубежных ученых, а также эмпирические исследования и практические применения. Гиперболические уравнения играют важную роль в математической физике и инженерии, а их всестороннее изучение с краевыми условиями является ключевым для решения множества реальных задач. В статье подробно анализируются актуальность, современные исследования, критические подходы и перспективы развития данной тематики.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, вторая краевая задача, дифференциальные уравнения, математическая физика

Kirish

Giperbolik turdagi differensial tenglamalar matematik fizika, muhandislik va texnika sohalarida fundamental ahamiyatga ega bo‘lib, ularning tahlili va yechim usullari zamonaviy matematik tadqiqotlarning asosiy yo‘nalishlaridan biridir. Ayniqsa, ***B*** − giperbolik tenglama uchun ikkinchi chegaraviy masalaning o‘rganilishi nazariy va amaliy jihatdan muhim bo‘lib, bu masalalar ko‘plab tabiiy va texnik jarayonlarni matematik modellashtirishda asosiy o‘rin tutadi. Chegaraviy masalalar matematik fizikaning asosiy bo‘limlaridan biri bo‘lib, ular orqali fizikaviy jarayonlarning boshlang‘ich va chegaraviy shartlarga bog‘liqligi o‘rganiladi. Mazkur maqolada ***B*** − giperbolik tenglama uchun ikkinchi chegaraviy masalani o‘rganishning nazariy asoslari, tarixiy rivoji, milliy va xorijiy olimlarning ilmiy merosi, empirik tadqiqotlar natijalari va amaliy qo‘llanilishi atroflicha yoritiladi. Shuningdek, hozirgi zamon ilmiy tadqiqotlaridagi dolzarb muammolar va istiqbolli yo‘nalishlar tanqidiy tahlil qilinadi. Maqolada ilgari surilgan masalalarning hal etilishida zamonaviy matematik usullar va texnikalar, hamda ularning amaliyotdagi ahamiyati chuqur tahlil qilinadi.

Adabiyotlar tahlili

Giperbolik tipdagi differensial tenglamalar va ular uchun chegaraviy masalalar matematik fizikaning eng muhim bo‘limlaridan biri hisoblanadi. Ushbu tenglamalar yordamida to‘lqin jarayonlarini, elastiklik nazariyasidagi muammolarni, issiqlik va

massaning tarqalish jarayonlarini, elektromagnit to‘lqinlarning harakatini va boshqa ko‘plab fizikaviy hodisalarni modellashtirish mumkin bo‘ladi. Giperbolik tenglamalarning eng oddiy ko‘rinishlari tarixan Lamé, D’Alamber, Fourier, Poisson, Laplas kabi klassik matematiklar tomonidan o‘rganila boshlangan. Ayniqsa, d’Alember tenglamasi va uning yechim usullari XVIII asr oxiri – XIX asr boshlarida matematik fizikaning rivojlanishiga kuchli turtki bergan. D’Alember tomonidan kiritilgan to‘lqin tenglamasi va unga nisbatan boshlang‘ich hamda chegaraviy masalalarning o‘rganilishi differensial tenglamalar nazariyasining asosiy bo‘limlaridan biriga aylandi. Keyingi bosqichlarda Poisson va Laplace tomonidan kiritilgan usullar, Green funksiyalari, Fourrier qatorlari yordamida yechimlarni ifodalash usullari rivojlandi. XIX asrda Poincaré, Riemann, Kirchhoff, Hadamard va boshqa yirik matematiklar giperbolik tenglamalar uchun umumiy yechimlarni topish, ular uchun chegaraviy va aralash masalalarni tadqiq etish, yechimlarning mavjudligi va yagonaligini isbotlashga oid chuqur natijalarga erishdilar. Ayniqsa, Hadamard tomonidan kiritilgan muammolarning yaxshi qo‘yilganligi (well-posedness) nazariyasi bu sohada tub burilish yasadi. U, agar boshlang‘ich va chegaraviy shartlarda ozgina o‘zgarish natijasida yechimda katta o‘zgarishlar yuzaga chiqmasa, masala to‘g‘ri qo‘yilgan deb atalishini aniqlab berdi. Bu esa, fizika va texnikada real jarayonlarni matematik modellashtirishda asosiy mezonlardan biri bo‘lib qoldi[1].

Giperbolik tenglamalar uchun chegaraviy masalalar, ayniqsa, ikkinchi chegaraviy masala yoki Neumann tipidagi masalalar, har doim o‘ziga xos murakkablikka ega bo‘lgan. Chegaraviy masalalarning klassifikatsiyasi va ularni yechish usullari ustida ko‘plab yirik olimlar izlanish olib borishgan. Bunday masalalarda, odatda, yechimning mavjudligi va yagonaligini isbotlash, ularni aniq yoki taxminiy usullar yordamida topish muammolari markaziy o‘ringa ega. Ikkinchi chegaraviy masala, ya’ni Neumann sharti bo‘yicha, chegarada funksiyaning normal hosilasining berilishi, ko‘plab fizikadagi real jarayonlarning matematik modellashtirilishida uchraydi. Masalan, issiqlik oqimi, to‘lqinlarning chegaradan aks etish jarayonlari, elektromagnit maydonlarning cheklangan sohalarda harakati kabi muammolar shular jumlasidan. Bu masalalarning yechimini topishda klassik usullar – ajratish usuli, Fourrier qatorlari va integral operatorlar keng qo‘llanilgan. Biroq, ko‘plab hollarda, ayniqsa, sohaning murakkab shaklida yoki ko‘p o‘lchamli hollarda bu usullar cheklangan imkoniyatga ega bo‘lgan. Shuning uchun, zamonaviy matematikada

variatsion usullar, funksional analiz, operatorlar nazariyasi, umumiy Hilbert va Banach fazolari, hamda sonli usullardan keng foydalanilmoqda. Ushbu usullar yordamida giperbolik tenglamalarning chegaraviy masalalari uchun umumiy nazariya yaratilgan va ko‘plab amaliy masalalar yechimining mavjudligi, yagonaligi va barqarorligi isbotlangan[2].

O‘zbekistonda va Markaziy Osiyoda giperbolik tenglamalar va ularning chegaraviy masalalari bo‘yicha olib borilgan ilmiy tadqiqotlar alohida e’tiborga loyiq. XX asrning ikkinchi yarmidan boshlab, O‘zbekiston Fanlar Akademiyasining Matematika instituti, Toshkent davlat universiteti va boshqa ilmiy markazlarda bu sohada ko‘plab yirik olimlar faoliyat yuritgan. Jumladan, M.A. Rasulov, A.R. Mahmudov, A.L. Akhunov, A.I. Ganiev, S.S. Sirojiddinov, Z.I. Islomov, N.M. Nuritdinov, U.A. Rozikov kabi olimlar giperbolik va aralash tipdagi tenglamalar uchun chegaraviy va aralash masalalarning nazariy asoslarini ishlab chiqqanlar. Ularning ishlari, asosan, chegaraviy masalalarning klassifikatsiyasi, umumiy yechimlarning mavjudligi va yagonaligi, yechimlarning silliqligi va barqarorligi, hamda sonli usullar yordamida taxminiy yechimlarni topish masalalariga bag‘ishlangan. Masalan, Rasulov tomonidan kiritilgan Green funksiyalari va integral operatorlar yordamida to‘lqin tenglamalarining aralash masalalari uchun umumiy yechimlarni ifodalash usullari, O‘zbekistonda bu sohada zamonaviy tadqiqotlar rivojlanishiga asos bo‘ldi. Shuningdek, Mahmudov va Akhunov tomonidan ko‘p o‘lchovli giperbolik tenglamalar uchun chegaraviy masalalarning variatsion va operator-nazariy usullari ishlab chiqilgan. Ularning ishlari xalqaro miqyosda ham yuqori baholangan va ko‘plab xorijiy ilmiy jurnallarda chop etilgan[3].

Giperbolik tenglamalar uchun ikkinchi chegaraviy masalani o‘rganishda, ayniqsa, zamonaviy matematik analiz va funksional analiz usullaridan keng foydalanilmoqda. Bu usullar yordamida, masalan, Hilbert va Banach fazolarida aniqlangan operatorlar yordamida masalaning yechimlari mavjudligi va yagonaligi isbotlanadi. Masalan, umumiy ko‘rinishdagi $\boldsymbol{B}$ − giperbolik tenglama uchun ikkinchi chegaraviy masala quyidagicha ifodalanadi: $L[u]=f(x,t)$, $(x,t)\in Q$, $u(x,0)=\varphi(x)$, $\partial u/\partial t(x,0)=\psi(x)$, $\partial u/\partial n|\partial Q=\vartheta(x,t)$, bu yerda L − differensial operator, Q − soha, ∂Q − chegarasi, $\partial u/\partial n$ − normal hosila, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\vartheta(x,t)$ − berilgan funksiyalar. Masalaning yechimi mavjudligi va yagonaligi, ko‘pincha, Lax-Milgram teoremasi, Fredholm alternativasi, Riesz teoremasi kabi fundamental natijalarga tayangan holda isbotlanadi.

Agar soha muntazam va shartlar yetarlicha silliq bo‘lsa, variatsion usullar yordamida yechim olish mumkin. Bunda, funktsionalni minimumga keltirish yoki Galerkin usuli yordamida sonli taxminiy yechimlar topiladi. Agar soha yoki shartlar murakkab bo‘lsa, zamonaviy hisoblash texnikasi va kompyuter usullari yordamida masalaning sonli yechimlari topiladi. Bu, ayniqsa, amaliy fizikadagi murakkab jarayonlarni modellashtirishda muhim ahamiyat kasb etadi[4].

Empirik tadqiqotlar va amaliy qo‘llanilishiga kelsak, giperbolik tenglamalar uchun ikkinchi chegaraviy masalalar muhandislik, geofizika, aerodinamika, akustika, elektrotexnika, optika, qurilish konstruksiyalari, meteorologiya va boshqa ko‘plab sohalarda keng qo‘llaniladi. Masalan, elastiklik nazariyasida to‘lqinlarning chegaralardan aks etishi va tarqalishi, qurilish inshootlarining seysmik barqarorligini o‘rganishda, geofizikada yer osti to‘lqinlarining tarqalishi, suv to‘lqinlari va elektromagnit to‘lqinlarning harakati kabi ko‘plab muammolar aynan ushbu tenglamalar va ularning chegaraviy masalalari yordamida tadqiq etiladi. Shuningdek, zamonaviy hisoblash matematikasi va kompyuter texnologiyalari yordamida giperbolik tenglamalarning sonli yechimlari topilib, amaliyotda real obyektlar uchun modellar tuziladi. Masalan, muhandislikda to‘lqinlarning konstruksiyalarga ta’siri, aerodinamikada samolyot qanotlari atrofidagi bosim va tezliklar taqsimoti, meteorologiyada atmosfera to‘lqinlarining tarqalish jarayonlari, elektromagnit maydonlarning cheklangan sohalarda harakati va boshqa ko‘plab muammolar shu turdagi tenglamalar yordamida modellashtiriladi[5].

Tanqidiy yondashuvlarda, giperbolik tenglamalar uchun ikkinchi chegaraviy masalalarda uchraydigan murakkab muammolar, masalan, sohaning notekisligi, chegarada silliqlikning yetarli emasligi, ko‘p o‘lchovlilik, vaqtga bog‘liq yoki noan’anaviy chegaraviy shartlar, nolinchi yoki chiziqli bo‘lmagan operatorlar, turli fizikaviy parametrlarning o‘zgaruvchanligi masalani sezilarli darajada murakkablashtiradi. Ko‘plab hollarda, klassik yechim mavjud emas yoki silliqlik yetarli emasligi sababli umumiy yechimlar faqatgina zaif (weak) yechimlar sinfida mavjud bo‘ladi. Bunday hollarda, funksional analizning zamonaviy usullari, Sobolev fazolari, zaif hosilalar nazariyasi, distribyutsiyalar yordamida masalaning yechimiga yondashiladi. Shuningdek, cheklangan sohalar va murakkab chegaraviy shartlar uchun sonli usullar – sonli differensial usullar, to‘r usullari, chiziqli va nolinchi algebraik tenglamalar tizimiga keltirish, variatsion taxminiy usullar keng qo‘llaniladi. Bu borada,

zamonaviy hisoblash texnikasi va dasturlash vositalari muhim ahamiyat kasb etadi. Tanqidiy nuqtayi nazardan, ba’zi hollarda, masalaning fizikaviy mazmuniga to‘liq mos kelmaydigan matematik yondashuvlar yoki yechimlarning barqarorligi bilan bog‘liq muammolar yuzaga kelishi mumkin. Shuning uchun, har bir amaliy masala uchun individual yondashuv va moslashuvchan matematik model tuzish lozim bo‘ladi[6].

Xalqaro miqyosda ham giperbolik tenglamalar uchun ikkinchi chegaraviy masalalarni o‘rganish sohasida ko‘plab fundamental tadqiqotlar amalga oshirilgan. Masalan, Sobolev, Ladyzhenskaya, Lions, John, Courant, Friedrichs kabi matematiklar tomonidan ushbu masalalar uchun umumiy nazariya yaratilgan, yechimlarning mavjudligi, yagonaligi, silliqligi va barqarorligi, sonli va taxminiy usullar yordamida yechimlarni topish muammolari chuqur o‘rganilgan. Sobolev tomonidan kiritilgan Sobolev fazolari va zaif hosilalar nazariyasi, Ladyzhenskaya va Lions tomonidan rivojlantirilgan Navier–Stokes va elastiklik nazariyasidagi giperbolik tenglamalarning chegaraviy masalalari, John va Courant tomonidan to‘lqin tenglamalarining umumiy xossalari va yechimlarning tarqalish tezligi bo‘yicha tadqiqotlar, Friedrichs tomonidan esa giperbolik tizimlar uchun umumiy yondashuvlar ishlab chiqilgan. Bu olimlarning ishlari hozirgi zamon matematik fizika va differensial tenglamalar nazariyasining poydevorini tashkil etadi. Shuningdek, zamonaviy ilmiy adabiyotlarda ko‘plab amaliy masalalar, yangi sonli algoritmlar, optimal boshqaruv va identifikatsiya muammolari, stoxastik giperbolik tenglamalar, chiziqli bo‘lmagan va dispersiya xossasiga ega tenglamalar uchun chegaraviy masalalar bo‘yicha tadqiqotlar olib borilmoqda.

O‘zbekiston olimlarining so‘nggi yillarda olib borgan tadqiqotlari ham xalqaro miqyosda e’tirof etilgan. Jumladan, Islomov, Rozikov, Ganiev, Nuritdinov va boshqa olimlar tomonidan giperbolik tenglamalar uchun yangi turdagi chegaraviy masalalar, nolinchi va chiziqli bo‘lmagan operatorlar uchun umumiy yechimlarni topish, optimal boshqaruv va parametrlarni identifikatsiyalash, zamonaviy sonli usullar yordamida masalaning yechimlarini aniqlash bo‘yicha ko‘plab ilmiy maqolalar chop etilgan. Bu ishlar, asosan, real fizikaviy va texnik jarayonlarni modellashtirish, matematik modellarni amaliyotga tadbiq etish va zamonaviy hisoblash texnologiyalarini matematik fizika muammolariga moslashtirishga qaratilgan. Hozirda, giperbolik tenglamalar uchun ikkinchi chegaraviy masalalarni o‘rganishda, ayniqsa, nolinchi va dispersiya xossasiga ega tenglamalar, vaqtga bog‘liq yoki stoxastik chegaraviy shartlar,

ko‘p o‘lchovli va murakkab sohalar uchun masalalarning nazariy va amaliy tomonlari chuqur tadqiq etilmoqda.

Shu tariqa, giperbolik tenglamalar uchun ikkinchi chegaraviy masala nazariyasi va amaliyoti so‘nggi yillarda jadal rivojlanib bormoqda. Ularning yechimlari uchun zamonaviy matematik usullar, funksional analiz, variatsion va operator-nazariy yondashuvlar, zamonaviy sonli algoritmlar, optimal boshqaruv va stoxastik modellash usullari keng qo‘llanilmoqda. Yangi turdagi fizikaviy va texnik masalalarning paydo bo‘lishi, hisoblash texnikasi va dasturlash vositalarining rivojlanishi natijasida, giperbolik tenglamalar uchun chegaraviy masalalar nazariyasi ham tobora boyib bormoqda. Shu bilan birga, masalalarning murakkabligi, yangi shartlar va cheklovlarning paydo bo‘lishi, matematik modellarni real jarayonlarga moslashtirish zarurati, tanqidiy yondashuvlarni va yangi usullarni ishlab chiqishni talab qilmoqda. Barcha yuqoridagi mulohazalar asosida, giperbolik tenglamalar uchun ikkinchi chegaraviy masalani o‘rganish va tadqiq etish hozirgi zamon matematik fizika va differensial tenglamalar nazariyasining eng dolzarb va istiqbolli yo‘nalishlaridan biri hisoblanadi.

Xulosa

Yuqorida keltirilgan tahlillar asosida, $\boldsymbol{B}$ − giperbolik tenglama uchun ikkinchi chegaraviy masalani o‘rganish matematik fizika va muhandislik sohalarida muhim ahamiyat kasb etishi yana bir bor o‘z isbotini topadi. Ushbu masalalarning nazariy asoslari, ularning tarixiy rivoji, milliy va xalqaro ilmiy maktablar hissasi, zamonaviy matematik usullar va texnologiyalarning joriy etilishi, shuningdek, amaliy sohalarda keng qo‘llanilishi bu mavzuning dolzarbligini yanada oshirmoqda. Giperbolik tenglamalar uchun ikkinchi chegaraviy masalalarni yechishda klassik va zamonaviy usullarning uyg‘unligi, sonli va analitik yondashuvlarning bir-birini to‘ldirishi, yangi fizikaviy va texnik muammolarning matematik modellashtirilishi, tanqidiy va innovatsion yondashuvlarni ishlab chiqish zarurati kelajakda ham bu yo‘nalishda ilmiy izlanishlarning davom etishini ta’minlaydi. Ayniqsa, ko‘p o‘lchamli, nolinchi, dispersiya xossasiga ega va stoxastik giperbolik tenglamalar uchun yangi turdagi chegaraviy masalalarning tadqiq etilishi, zamonaviy hisoblash texnologiyalari yordamida amaliy modellar tuzish, optimal boshqaruv va identifikatsiya muammolarini yechish bo‘yicha ilmiy izlanishlar davom etadi. Shu sababli, $\boldsymbol{B}$ − giperbolik tenglama

uchun ikkinchi chegaraviy masala nazariyasining rivoji va amaliyotga tatbiqi hozirgi va kelajak avlod matematiklari uchun muhim ilmiy va amaliy vazifa bo‘lib qoladi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Hadamard, J. Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations. Yale University Press, 1923.

2. Sobolev, S.L. Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics. American Mathematical Society, 1963.

3. Rasulov, M.A. Aralash tipdagi differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalar. Toshkent: Fan, 1982.

4. Lions, J.L. Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Dunod, 1969.

5. Courant, R., & Hilbert, D. Methods of Mathematical Physics. Vol. II, Wiley, 1962.

6. Islomov, Z.I., Rozikov, U.A., Ganiev, A.I. Giperbolik tenglamalar uchun zamonaviy sonli va analitik usullar. Toshkent: IQTISOD-MOLIYA, 2020.