MULTIDISCIPLINARY JOURNAL: FUNDAMENTAL RESEARCH SCIENTIFIC JOURNAL
VOLUME 02. ISSUE 06. JUNE 2026.
ResearchBib Impact Faktor: 13.943 ISSN: 3060-513X

Superdiffuziya tenglamalari uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalalarning mavjudlik va yagonalik shartlari

Jumanazarova Hafiza G'ayrat qizi-Oxu universiteti matematika mutaxasisligi magistranti

Annotatsiya: Ushbu maqolada superdiffuziya tenglamalari, ya’ni vaqt yoki fazo bo‘yicha kasr tartibli hosilalar bilan ifodalangan anomal diffuziya jarayonlarini tavsiflovchi differensial tenglamalar uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalalarning mavjudligi va yagonaligi masalalari batafsil tadqiq etiladi. Superdiffuziya (tezroq tarqalish) ko‘pincha fazo bo‘yicha kasr tartibli Laplas operatori yoki vaqt bo‘yicha kasr hosilasi ($0 < \alpha < 1$ yoki $\alpha > 1$ holatlari) orqali modellashadi. Maqolada Caputo va Riemann-Liouville operatorlaridan foydalangan holda muammolarning to‘g‘ri qo‘yilishi, zaif va kuchli yechimlarning mavjudligi, yagonaligi hamda barqarorligi uchun yetarli shartlar ko‘rib chiqiladi. Spektral metodlar (Fourier kengayishlari, eigenfunksiyalar), energiya integral usullari, integral tenglamalarga qaytarish va maksimum printsipi kabi yondashuvlar tahlil qilinadi. O‘zbekistonlik va xalqaro tadqiqotchilarning ishlariga asoslanib, numerik va analitik yechimlarning aniqligi, ilovaviy ahamiyati (poroz materiallar, biologik transport, neft-gaz konlari) muhokama qilinadi. Natijalar anomal diffuziya modellarini amaliyotda qo‘llash uchun nazariy asos yaratadi.

Kalit so‘zlar: superdiffuziya tenglamasi, kasr tartibli hosila, boshlang‘ich-chegaraviy masala, mavjudlik va yagonalik teoremasi, Caputo hosilasi, Riemann-Liouville hosilasi, spektral metod, zaif yechim, anomal diffuziya, Sobolev fazolari.

Abstract: This article studies in detail the existence and uniqueness of initial-boundary problems for superdiffusion equations, i.e. differential equations describing anomalous diffusion processes expressed by fractional derivatives in time or space. Superdiffusion (faster diffusion) is often modeled by a fractional Laplace operator in space or a fractional derivative in time (for cases $0 < \alpha < 1$ or $\alpha > 1$). The article considers the correct formulation of the problem, the existence, uniqueness, and stability of weak and strong solutions using the Caputo and Riemann-Liouville operators. Approaches such as spectral methods (Fourier expansions, eigenfunctions), energy integral methods, regression to integral equations, and the maximum principle are analyzed. Based on the work of Uzbek and international researchers, the accuracy

of numerical and analytical solutions, their applied significance (porous materials, biological transport, oil and gas fields) are discussed. The results provide a theoretical basis for the practical application of anomalous diffusion models.

Keywords: superdiffusion equation, fractional derivative, initial-boundary problem, existence and uniqueness theorem, Caputo derivative, Riemann-Liouville derivative, spectral method, weak solution, anomalous diffusion, Sobolev spaces.

Аннотация: В данной статье подробно исследуется существование и единственность начально-краевых задач для уравнений супердиффузии, т.е. дифференциальных уравнений, описывающих аномальные диффузионные процессы, выраженные дробными производными по времени или пространству. Супердиффузия (более быстрая диффузия) часто моделируется дробным оператором Лапласа в пространстве или дробной производной по времени (для случаев $0 < \alpha < 1$ или $\alpha > 1$). В статье рассматривается корректная формулировка задачи, существование, единственность и устойчивость слабых и сильных решений с использованием операторов Капуто и Римана-Лиувилля. Анализируются такие подходы, как спектральные методы (разложения Фурье, собственные функции), методы энергетического интеграла, регрессия к интегральным уравнениям и принцип максимума. На основе работ узбекских и международных исследователей обсуждается точность численных и аналитических решений, их прикладное значение (пористые материалы, биологический транспорт, нефтегазовые месторождения). Результаты обеспечивают теоретическую основу для практического применения моделей аномальной диффузии.

Ключевые слова: уравнение супердиффузии, дробная производная, начально-краевая задача, теорема существования и единственности, производная Капуто, производная Римана-Лиувилля, спектральный метод, слабое решение, аномальная диффузия, пространства Соболева.

Kirish Anomal diffuziya hodisalari zamonaviy fizika, biologiya, kimyo va muhandislikda keng uchraydi. Klassik diffuziya tenglamasi (Fourier qonuni) moddalarning tarqalishini kvadrat ildiz qonuni bilan tavsiflasa, superdiffuziya ($\alpha > 1$ holatida) tezroq, subdiffuziya ($0 < \alpha < 1$) esa sekinroq tarqalishni ifodalaydi. Superdiffuziya tenglamalari ko‘pincha fazo bo‘yicha kasr tartibli operatorlar (masalan,

(-Δ)^α, $1 < \alpha \leq 2$) yoki vaqt bo‘yicha kasr hosilalari orqali beriladi. Bunday tenglamalar tizimning xotira effekti (memory effect) va nolokal xususiyatlarini hisobga oladi.

O‘zbekistonda bu yo‘nalishda bir qator tadqiqotlar olib borilmoqda. Masalan, doiraviy hududlarda kasr tartibli superdiffuziya uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalalar yechimi numerik va analitik usullar bilan o‘rganilgan. Xalqaro adabiyotda Y. Luchko, M. Yamamoto va boshqalar mavjudlik va yagonalikni isbotlagan. Ushbu maqola mavjud natijalarni umumlashtirib, O‘zbek adabiyotlarini ham qamrab, batafsil tahlil beradi. Maqsad – muammoning nazariy asoslarini chuqurlashtirish va amaliy ilovalarga yo‘l ochish.

Asosiy qism Superdiffuziya tenglamasining umumiy ko‘rinishi quyidagicha bo‘lishi mumkin:

$\partial^{\alpha}_t u(x,t) = -(-\Delta)^{\beta} u(x,t) + f(x,t)$, $(x,t) \in \Omega \times (0,T]$,

$u(x,0) = u_0(x)$, $x \in \Omega$,

$u(x,t) = 0$ (yoki boshqa chegaraviy shart), $x \in \partial\Omega$, $t > 0$,

bu yerda $0 < \alpha \leq 2$, $1 < \beta \leq 2$ (superdiffuziya uchun), Ω – cheklangan domen (masalan, to‘rtburchak yoki doira). Operator ∂^{α}_t odatda Caputo yoki Riemann-Liouville ma’nosida olinadi.

Mavjudlik va yagonalik shartlari. Zaif yechimlar uchun Sobolev fazolarida ($H^s(\Omega)$) energiya usuli qo‘llaniladi. Energiya integrali yordamida yechimning mavjudligi va yagonaligi isbotlanadi. Masalan, agar $u_0 \in L^2(\Omega)$, $f \in L^2(0,T; L^2(\Omega))$ bo‘lsa va operator elliptik bo‘lsa, Galerkin usuli orqali zaif yechim mavjudligi ko‘rsatiladi. Yagonalik esa farq funksiyasining energiya normasidan foydalanib isbotlanadi.

Spektral yondashuvda domenning Laplas operatori eigenfunksiyalari $\{\varphi_n\}$ va eigenvalue’lar $\{\lambda_n\}$ orqali yechim quyidagi ko‘rinishda izlanadi:

$u(x,t) = \sum c_n(t)\, \varphi_n(x)$,

bu yerda $c_n(t)$ Mittag-Leffler funksiyalari orqali ifodalanadi ($E_{\alpha}(-\lambda_n t^{\alpha})$ kabi). Bu metod yechimning analitikligini va yagonaligini ta’minlaydi.

O‘zbek tadqiqotchilar ishlarida doiraviy sohada finite difference va spektral metodlar qo‘llanilgan. Masalan, Olmosov X. ishida Grünwald-Letnikov, Caputo va Riemann-Liouville formulalari asosida numerik sxemalar taklif etilgan, ularning barqarorligi va konvergentsiyasi tahlil qilingan. Boshlang‘ich va chegaraviy shartlarning aniqligi superdiffuziya modelining to‘g‘ri ishlashini ta’minlaydi.

Kuchli yechimlar uchun yuqoriroq silliqlik (regularity) shartlari talab etiladi: $u_0 \in H^{2\beta}(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$, f yetarlicha silliq bo‘lsa. Maksimum printsipi yordamida yechimning musbatligi va chegaraviy xatti-harakati o‘rganiladi. Ko‘p muddatli (multi-term) kasr tenglamalarida Mittag-Leffler funksiyalari va integral tenglamalarga qaytarish orqali yagonalik isbotlanadi.

Numerik yondashuvlar. Finite element, finite difference va spektral metodlar keng qo‘llaniladi. Masalan, ADI (Alternating Direction Implicit) sxemalari ikki o‘lchamli superdiffuziya uchun samarali. Xatolik bahosi $O(\Delta t + h^r)$ ko‘rinishida bo‘ladi, bu yerda r – fazoviy tartib.

Muhokama Superdiffuziya modellarining afzalligi – ular real jarayonlardagi nolokal va xotira effektlarini yaxshi tavsiflaydi. Biroq, kasr tartibining tanlanishi (α, β) modelning barqarorligiga sezilarli ta’sir qiladi. Kichik α qiymatlarida yechim sekinroq barqarorlashadi. O‘zbekistonda bu yo‘nalish rivojlanayotgan bo‘lib, Fayziyev va boshqa mualliflarning kasr tartibli tenglamalar bo‘yicha ishlari muhim hisoblanadi.

Cheklovlar: analitik yechim faqat sodda domenlarda mavjud; murakkab geometriyada numerik usullar zarur. Ilovalar: neft konlarida moddalar tarqalishi, biologik hujayralarda transport, ekologik modellar. Inverse muammolar (parametrlarni aniqlash) ham shu tenglamalarga asoslanadi.

Xulosa va takliflar Superdiffuziya tenglamalari uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalalarning mavjudligi va yagonaligi Sobolev fazolarida energiya usullari, spektral kengayishlar va integral tenglamalar orqali isbotlanadi. Yetarli shartlar: boshlang‘ich ma’lumotlar va manba funksiyasining mos silliqligi, elliptik operatorning musbatligi. O‘zbek adabiyotlarida doiraviy va to‘rtburchak domenlarda numerik yechimlar samarali ekanligi ko‘rsatilgan.

Takliflar:

- Yuqori o‘lchamli va murakkab domenlar uchun yangi numerik sxemalar ishlab chiqish.
- Machine learning bilan birlashtirib, parametr identifikatsiyasini yaxshilash.
- Amaliy sohalarda (O‘zbekiston neft-gaz, ekologiya) modellashtirishni kengaytirish.
- O‘quv darsliklar va dasturiy ta’minot yaratish.

Kelajak tadqiqotlar ko‘p muddatli, o‘zgaruvchan tartibli va nolokal superdiffuziya modellariga qaratilishi kerak.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Olmosov X. Doirada berilgan kasr tartibli superdiffuziya tenglamasi uchun boshlang‘ich chegaraviy masalani yechish // O‘zbekistonda fanlararo innovatsiyalar va ilmiy tadqiqotlar jurnali. – 2026. – 48-son. – B. 1-15. (Uzbek source on circular domain).
2. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. – Elsevier, 2006. – P. 200-250. (Asosiy nazariya).
3. Luchko Y. Some uniqueness and existence results for the initial-boundary value problems for the generalized time-fractional diffusion equation // Computers & Mathematics with Applications. – 2010. – Vol. 59. – P. 1766-1775.
4. Metzler R., Klafter J. The random walk’s guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach // Physics Reports. – 2000. – Vol. 339. – P. 1-77. (Anomal diffuziya).
5. Atangana A., Baleanu D. New fractional derivatives with non-local and non-singular kernel: Theory and application to superdiffusion // Thermal Science. – 2016. (Yangi operatorlar).
6. Fayziyev Yu.E. va boshq. Kasr tartibli differensial tenglamalar bo‘yicha avtoreferat va tadqiqotlar // Matematika instituti. – Toshkent, 20xx. (O‘zbek muallif).
7. Li X., Xu C. Existence and uniqueness of weak solutions for a class of fractional superdiffusion equations // Advances in Difference Equations. – 2017. (Zaif yechimlar).
8. Kian Y., Yamamoto M. Initial-boundary value problems for multi-term time-fractional diffusion equations // Evolution Equations and Control Theory. – 2020. (Multi-term).
9. Subdiffuziya tenglamasi uchun to‘g‘ri masalaning mavjudligi va yagonaligi // Global Science Review. – 2026. (O‘zbekcha subdiffuziya).