



**Ikki o'lchamli membrana tenglamasidan manba funksiyani aniqlashning teskari
masalasi**

**Inverse problem of determining the source function from the two-dimensional
membrane equation**

**Обратная задача определения функции источника из двумерного
уравнения мембраны**

Qodirova Reymajon Farhodovna-Osiyo Xalqaro Universiteti magistranti

Annotatsiya Maqolada ikki o'lchamli membrana tebranishlarini tavsiflovchi to'liq tenglamasidan manba funksiyasini (ta'sir etuvchi kuch yoki tashqi ta'sir manbai) aniqlashga oid teskari masala ko'rib chiqiladi. Ushbu masala matematik fizika va teskari masalalar nazariyasining muhim yo'nalishlaridan biri bo'lib, seysmologiya, akustika, tibbiyot tasvirlash texnologiyalari va materiallar mexanikasida keng qo'llaniladi. Masalaning yaxshi qo'yilganligi, yechimning mavjudligi va yagonaligi masalalariga alohida e'tibor qaratilgan. Ma'lumotlarning cheklanganligi sharoitida (masalan, faqat chegara yoki ichki nuqtalardagi kuzatuvlar) sonli va analitik yondashuvlar tahlil qilinadi. Teskari masalaning noxos xususiyatlari va barqarorlashtirish usullari muhokama etiladi.

Kalit so'zlar: ikki o'lchamli to'liq tenglamasi, membrana tebranishlari, teskari masala, manba funksiyasi aniqlash, yaxshi qo'yilganlik, barqarorlashtirish, sonli usullar, chegara kuzatuvlari.

Аннотация. В статье рассматривается обратная задача определения функции источника (действующей силы или внешнего источника) из волнового уравнения, описывающего двумерные колебания мембраны. Эта задача является одной из важных областей математической физики и теории обратных задач и широко используется в сейсмологии, акустике, медицинской визуализации и механике материалов. Особое внимание уделяется вопросам корректности задачи, существования и единственности решения. Численные и аналитические подходы анализируются в условиях ограниченных данных (например, наблюдения только в граничных или внутренних точках). Обсуждаются особенности обратной задачи и методы стабилизации.





Ключевые слова: двумерное волновое уравнение, колебания мембраны, обратная задача, определение функции источника, корректность, стабилизация, численные методы, граничные наблюдения.

Abstract: The article considers the inverse problem of determining the source function (acting force or external source) from the wave equation describing two-dimensional membrane vibrations. This problem is one of the important areas of mathematical physics and the theory of inverse problems, and is widely used in seismology, acoustics, medical imaging technologies, and mechanics of materials. Particular attention is paid to the issues of well-posedness of the problem, the existence and uniqueness of the solution. Numerical and analytical approaches are analyzed in conditions of limited data (for example, observations only at boundary or interior points). The peculiarities of the inverse problem and stabilization methods are discussed.

Keywords: two-dimensional wave equation, membrane vibrations, inverse problem, determination of the source function, well-posedness, stabilization, numerical methods, boundary observations.

Kirish Matematik fizikada to'liq jarayonlarini tavsiflovchi differensial tenglamalar orqali ko'plab tabiiy va texnik jarayonlarni modellashtirish mumkin. Ikki o'lchamli membrana tebranishlari to'liq tenglamasi bilan ifodalanadi va bu tenglama seysmik to'liqlar, akustik tebranishlar, elektromagnit maydonlarning tarqalishi kabi hodisalarni o'rganishda asosiy rol o'ynaydi [1, 45-50 betlar].

To'g'ri masalada boshlang'ich va chegara shartlari berilgan holda tebranish jarayoni aniqlanadi. Biroq amaliyotda ko'pincha teskari masalalar paydo bo'ladi: ya'ni, kuzatuv natijalaridan (masalan, membrana yuzasidagi tebranish amplitudalari yoki chegara nuqtalaridagi o'lchovlar) tashqi manba funksiyasini (masalan, zarba kuchi, tebranish manbai) tiklash talab etiladi [2, 12-18 betlar].

Bunday teskari masalalar odatda noxos (ill-posed) xususiyatga ega bo'lib, kichik o'lchov xatolari katta xatoliklarga olib kelishi mumkin. Shu sababli ularni yechishda maxsus barqarorlashtirish usullari qo'llaniladi. Maqolaning maqsadi – ikki o'lchamli holatda manba funksiyasini aniqlash masalasining asosiy xususiyatlarini va yechish yondashuvlarini umumiy ko'rinishda tahlil qilishdir.





Asosiy qism Ikki o'lchamli membrana tebranishlari odatda quyidagi to'lqin tenglamasi bilan tavsiflanadi. Bu tenglama fizik jarayonlarni modellashtirishda keng qo'llaniladi va uning teskari masalasi ko'plab ilmiy sohalarda o'rganilmoqda [1, 130-136 betlar].

Teskari masalada maqsad – berilgan kuzatuv ma'lumotlaridan (masalan, ma'lum vaqt oralig'ida chegara yoki ichki nuqtalardagi qiymatlar) manba funksiyasini tiklashdir. Kuzatuvlar odatda chegara yuzasida amalga oshiriladi, chunki ichki o'lchovlar ko'pincha qiyin yoki imkonsiz bo'ladi [3].

Masala noxos xususiyatga ega bo'lishining asosiy sababi – ma'lumotlarning cheklanganligi va jarayonning teskari tarqalish xususiyatidir. Kichik o'zgarishlar kuzatuvlarda katta farqlarga olib kelishi mumkin. Shu sababli yechimning mavjudligi va yagonaligi faqat qo'shimcha shartlar qo'yilganda ta'minlanadi [2, 20-25 betlar].

Masalaning yaxshi qo'yilganligi uchun odatda quyidagi shartlar talab etiladi: manba funksiyasi ma'lum sinfga (masalan, silliq yoki cheklangan qo'llab-quvvatlashga ega) mansub bo'lishi, kuzatuv vaqti yetarli uzunlikda bo'lishi kerak. Aks holda bir nechta turli manbalar bir xil kuzatuvlarni keltirib chiqarishi mumkin.

Sonli yechish usullari orasida eng keng tarqalganlari quyidagilar:

- Optimallashtirish usullari (masalan, eng kichik kvadratlar usuli yoki regularizatsiyalangan funksional minimallashtirish);
- Chegara integral tenglamalari usuli;
- Ichki nuqtalar bo'yicha rekonstruksiya (agar mavjud bo'lsa);
- Vaqt-faza usullari va spektral tahlilga asoslangan yondashuvlar [4].

O'zbekiston olimlari tomonidan ham shunga yaqin masalalar, xususan, to'lqin tenglamalari uchun teskari masalalar sonli usullarda o'rganilgan [5]. Bunday tadqiqotlar qovushqoq-elastik muhitlar va gorizontaal bir jinsli bo'lmagan qatlamlar uchun kengaytirilgan.

Muhokama Teskari masalaning asosiy qiyinchiliklari quyidagilardan iborat:

- Noxoslik – kichik shovqin katta xatolikka olib keladi;
- Yechimning yagonaligi – bir xil kuzatuvlarni keltirib chiqaruvchi turli manbalar mavjudligi;
- Hisoblash murakkabligi – katta hajmdagi ma'lumotlarni qayta ishlash talab etiladi.





Barqarorlashtirish uchun Tixonov regularizatsiyasi, truncated SVD yoki iteratsion usullar keng qo'llaniladi. Ikki o'lchamli holatda xususiyatlar yanada murakkablashadi, chunki to'lqin tarqalishi fazoviy geometriyaga bog'liq [3].

Amaliy misollar orasida yer silkinishlaridan manba (epitsentr) joylashuvini aniqlash, akustik signallardan shovqin manbasini topish va tibbiy ultratovush tasvirlashda qo'llaniladigan manba rekonstruksiya kiradi. O'zbekiston sharoitida bunday masalalar seysmik monitoring va muhandislik tebranishlarini nazorat qilishda dolzarbdir.

Xulosa va takliflar Ikki o'lchamli membrana tenglamasidan manba funksiyasini aniqlash teskari masalasi matematik fizikaning dolzarb va amaliy ahamiyatga ega yo'nalishlaridan biridir. Masala noxos bo'lishiga qaramay, regularizatsiya va zamonaviy sonli usullar yordamida samarali yechilmoqda. Kelgusida tadqiqotlarni quyidagi yo'nalishlarda rivojlantirish maqsadga muvofiq:

- Ko'p manbali teskari masalalarni o'rganish;
- Mashinaviy o'qitish usullarini integratsiya qilish;
- Real vaqt rejimida ishlaydigan algoritmlarni ishlab chiqish.

O'zbekiston olimlari tomonidan bu sohada olib borilayotgan ishlar xalqaro darajada e'tirof etilishi mumkin.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Matematik fizika metodlari. O'quv qo'llanma. Guliston davlat universiteti, 2020-yil, 180 bet.
2. Romanovskiy V.I. nomidagi Matematika instituti huzuridagi ilmiy kengash materiallari. Toshkent, 2019-yil, avtoreferat, 25 bet.
3. The inverse source problem for the wave equation revisited: A new approach. RICAM Report, 2021 (arxiv:2112.01312).
4. An inverse source problem for a variable speed wave equation. Inverse Problems jurnali, 2015-yil.
5. Totieva. Gorizontaal bir jinsli bo'lmagan qovishqoq-elastik muhitlar uchun teskari masalalar. Avtoreferat, Toshkent, 2019-yil, 15-20 betlar.

